TES 2 – DS n°2 – Corrigé

Exercice 1 : $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x$ pour tout $x \in [-6;9] = I$

1) a) f est dérivable sur I et $f'(x) = -x^2 - x + 6$ pour tout $x \in I$

b) f' est une fonction trinôme du second degré. Etudions son signe

$\Delta = b^2 - 4ac = 25$ donc $\Delta > 0$ par conséquent il y a 2 racines distinctes x_1 et x_2 : $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$. D'où le tableau :

x	-6		-3		$+2$		9
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	18	$\searrow$	$-13{,}5$	$\nearrow$	$\frac{22}{3}$	$\searrow$	$-229{,}5$

$a = -1 < 0$

2) a) On constate que l'équation $f(x) = 5$ admet 3 solutions sur $[-6;9]$: l'une sur $[-6;-3)$, l'autre sur $[-3;-2]$ et enfin une sur $[-2;9]$.

b)

x	2		3
$f(x)$	$\frac{22}{3}$	$\searrow$	$4{,}5$

- On sait que f est continue et strictement décroissante sur $[2;3]$
- $f(2) = \frac{22}{3} \approx 7{,}5$; $f(3) = 4{,}5$ donc 5 est compris entre $f(3)$ et $f(2)$

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = 5$ admet une solution unique sur $[2;3]$

Exercice 2 :

1) Vrai 2) Faux 3) Vrai 4) Faux 5) Faux

Exercice 3 :

1) $g(3) = -5$ et $g(0) = 4$

2) Le coefficient directeur de la droite D est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$$m = \frac{-1 - \frac{1}{3}}{\frac{4}{3} - 1} = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = -\frac{4}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{1} = -\frac{4}{1} \quad \boxed{m = -4}$$

donc D a pour équation $y = -4x + p$ or $A(1;\frac{1}{3}) \in D$

donc $\frac{1}{3} = -4 \times (1) + p$ donc $p = \frac{1}{3} + 4 = \frac{13}{3}$.

$\mathcal{D}$ a donc pour équation $y = -4x + \frac{13}{3}$

3) $g'(-1) = 0$
$g'(1) = -4$

4) Avec la courbe n°1 $\begin{cases} \text{l'image de } -1 \text{ est } 0 \\ \text{" de } 1 \text{ est } 1 \end{cases}$

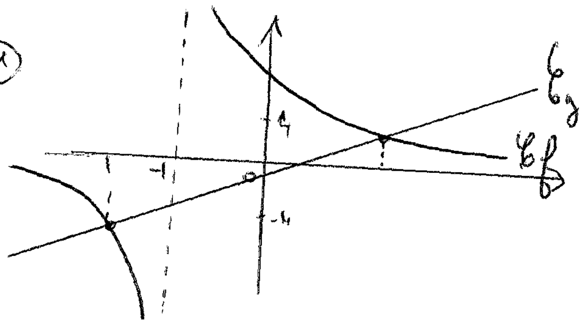
Avec la courbe n°2 $\begin{cases} \text{l'image de } -1 \text{ est } 3 \\ \text{" de } 1 \text{ est } 3 \end{cases}$

Avec la courbe n°3 $\begin{cases} \text{l'image de } -1 \text{ est } 0 \\ \text{" de } 1 \text{ est } -4 \end{cases}$

La courbe qui convient est donc la n°3 car $g'(-1) = 0$ et $g'(1) = -4$

Exercice n°4

1



$f(x) = g(x)$ semble avoir 2 solutions car $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points distincts.

2 $f(x) = g(x) \iff \frac{9}{x+1} = 2x - 1 \iff 9 = (2x-1)(x+1)$ avec $x \neq -1$

$\iff 9 = 2x^2 + 2x - x - 1$ avec $x \neq -1$
$\iff -2x^2 - x + 10 = 0$

$\iff x_1 = -2{,}5$ ou $x_2 = 2$ (on utilise le calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$ ...)

$S = \{-2{,}5 ; 2\}$

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent donc bien 2 points dont les abscisses sont $-2{,}5$ et 2.

3 Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on va déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs de x :

On $f(x) - g(x) = \frac{9}{x+1} - (2x-1) = \frac{-2x^2 - x + 10}{x+1}$

x	$-\infty$		$-2{,}5$		-1		2		$+\infty$
$-2x^2-x+10$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

car $a = -2 < 0$

Ainsi $f(x)-g(x)<0 \iff f(x)<g(x)$ sur $]-2{,}5;-1[\cup]2;+\infty[$

donc $\mathcal{C}_f$ est <u>en dessous</u> de $\mathcal{C}_g$ sur $]-2{,}5;-1[\cup]2;+\infty[$

et $f(x)-g(x)>0 \iff f(x)>g(x)$ sur $]-\infty;-2{,}5[\cup]1;2[$

donc $\mathcal{C}_f$ est <u>au dessous</u> de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty;-2{,}5[\cup]-1;2[$

Exercice 5 :

① <u>Partie A</u>

g est continue sur $[-5;5]$
g est strictement croissante sur $[-5;5]$
$g(-5)=-70$
$g(5)=210$

Comme 0 est compris entre -70 et 210, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[-5;5]$ d'après le Théorème de la valeur intermédiaire.

x	0		1
$g(x)$	-5 ↗	0 ↗	2

Comme $g(0)=-5$ et $g(1)=2$ et que $g(\alpha)=0$ alors $\underline{0<\alpha<1}$

Par balayage à la calculatrice on obtient $g(0{,}81)\simeq -0{,}07$ et $g(0{,}82)\simeq 0{,}03$

Donc $g(0{,}81)<0$ et $g(0{,}82)>0$ alors $\boxed{0{,}81<\alpha<0{,}82}$

②

x	-5	α	5
$g(x)$	-70 ↗	0 ↗	210
$g(x)$	$-$	0	$+$

Sur $[-5;\alpha]$ g est croissante donc $g(x)\le g(\alpha)=0$ donc $\underline{g(x)\le 0}$

Sur $[\alpha;5]$ g est croissante donc $0=g(\alpha)\le g(x)$ donc $g(x)\geqslant 0$

<u>Partie B</u> $f(x)=\dfrac{x^3-3x+1}{(x+1)^2}$

① $f'(x)=\dfrac{(3x^2-3)(x+1)^2-(x^3-3x+1)(2(x+1))}{(x+1)^4}=\dfrac{(3x^2-3)(x+1)-(x^3-3x+1)(2)}{(x+1)^3}$

$=\dfrac{3x^3+3x^2-3x-3-2x^3+6x-2}{(x+1)^3}=\dfrac{x^3+3x^2+3x-5}{(x+1)^3}$

donc $\boxed{f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}}$ pour tout $x\in]-1;5]$

On sait que $(x+1)^3=(x+1)(x+1)^2$ d'où le tableau de signe de $f'(x)$:

x	-1		α		5
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$(x+1)$	0	$+$		$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

d'après Partie A

d'où le tableau de variation de f

x	-1		α		5
$f(x)$	‖	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(5)$

$f(\alpha)\simeq -0{,}3$ $\qquad$ $f(5)\simeq 3{,}1$

Exercice 6 $\quad f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 5$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$

Donc $f'(1) = 12$

D'autre part $f(1) = 2$

or $y = f'(1)(x-1) + f(1)$
$= 12(x-1) + 2$

Donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 1

est $\boxed{y = 12x - 10}$

2) On sait que 2 droites non "verticales" sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Soit a l'abscisse d'un point de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 3x - 7$.

d'où $f'(a) = 3$

$\Leftrightarrow 3a^2 + 6a + 3 = 3$

$\Leftrightarrow 3a^2 + 6a = 0$

$\Leftrightarrow 3a(a+2) = 0$

$\Leftrightarrow 3a = 0$ ou $a + 2 = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ ou $a = -2$

Il y a donc 2 points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 3x - 7$: il s'agit des points d'abscisses 0 et -2.