L'essentiel sur les suites

Table des matières

1 Généralités

1.1 Définition

Définition :
Une suite u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

Exemple « naïf » : La suite des nombres impairs $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots, 2005, 2007, \ldots,$ *etc est une suite que l'on peut noter u de sorte que :*

- *le premier terme sera noté* $u_0 = 1$.
- *le deuxième terme sera noté* $u_1 = 3$
- *le troisième terme sera noté* $u_2 = 5$
- $\ldots$
- *le septième terme sera noté* $u_6 = 13$
- $\ldots$ *etc.*

Autrement dit une suite u est une liste infinie de nombres réels que l'on numérote sous la forme : u_0,u_1,u_2,u_3,...,u_{252},u_{253},u_{254},... etc.
On note de manière générale u_n est la valeur de **rang** n(on dit souvent **indice** au lieu de rang).

Une suite u peut-être définie de 2 manières :

- par la donnée de son **terme général** u_n en fonction de n.
  Par exemple :
  1. *la suite u définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $u_n = 3n + 5$.
  2. *la suite v définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $v_n = 2^n$.
  3. *la suite w définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* $w_n = \frac{1}{n}$.
- par la donnée de son premier terme et par une relation (appelée **relation de récurrence**) donnant u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier n.
  Par exemple :
  1. *la suite x définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $x_0 = 1$ *et* $x_{n+1} = 2x_n + 4$.
  2. *la suite y définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* $y_1 = 14$ *et* $y_{n+1} = 7 - y_n$.

Exercice I :
Calculer les 5 premiers termes pour chacune des suites des exemples précédents.

1.2 Monotonie

Définition :
- On dit qu'une suite u est **croissante** si : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- On dit qu'une suite u est **décroissante** si : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- On dit qu'une suite u est **stationnaire** (ou constante) si : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarques :
Lorsque les inégalités sont strictes on peut définir une suite strictement croissante ou strictement décroissante.
Une suite qui n'est **ni croissante,ni décroissante** est dite **non monotone**.

2 Suites arithmétiques

2.1 Définition

Définition :
On dit qu'une suite u est **arithmétique** de **raison** r si : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Description schématique :

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} \ldots etc \quad u_{n-1} \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \quad \ldots etc$$

Par exemple la suite u des nombres impairs est arithmétique de raison 2,en effet :

$$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+2} 7 \xrightarrow{+2} 9 \xrightarrow{+2} \ldots etc \quad u_{n-1} \xrightarrow{+2} u_n \xrightarrow{+2} u_{n+1} \quad \ldots etc$$

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} \ldots etc \quad u_{n-1} \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \quad \ldots etc$$

Ce schéma montre bien que $u_{n+1} = u_n + 2$ pour tout n.

2.2 Propriétés

Les deux propriétés suivantes permettent de calculer u_n en fonction de n lorsqu'une suite est arithmétique :

Soit une suite u **arithmétique** de **raison** r alors :
• Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n = u_0 + rn$.
• Pour tout entier naturel n et p , on a $u_n = u_p + r(n-p)$.
En fait la 1ère se déduit de la 2ème en prenant $p = 0$.

Par exemple :

1. *si u est une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = -18$ alors $u_n = -18 + 4n$ pour tout n.*
2. *si U est une suite arithmétique de raison -3 et telle que $U_{23} = 5$ alors $U_n = U_{23} - 3(n-23) = 5 - 3n + 69 = 74 - 3n$ pour tout n.*

2.3 Somme de termes

On s'intéresse à la somme $S = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} U_p = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{n-1} + U_n$.

On admettra le résultat suivant :

Soit une suite U **arithmétique** de **raison** r alors :
$S = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{n-1} + U_n = (n+1)\left(\frac{U_0 + U_n}{2}\right)$.
ou encore de manière équivalente
$S = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{n-1} + U_n = (n+1)\left(U_0 + \frac{n}{2}r\right)$.

2.4 Exercices

Exercice II :

Pour chaque suite définie ci-dessous, dire si c'est une suite arithmétique (on précisera alors le premier terme et la raison) et calculer les trois premiers termes.

1. $u_0 = 2$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 5 + u_n$
2. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = 3n + 4$
3. Pour tout $n > 0$, $u_n = n^2$

Exercice III :

Les suites de cet exercice sont **arithmétiques** de raison r.

1. $u_0 = 12$ et $r = 7$.
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n puis calculer u_{59}.
2. $u_7 = 20$ et $r = 2$.
   (a) Calculer u_8 et u_6.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n puis calculer u_0 et u_{58}.

Exercice IV :

Soit b une suite arithmétique de raison 6 et de terme initial $b_0 = 1$.

1. Calculer les quatre premiers termes.
2. Calculer b_{111}.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{50} b_p$.

Exercice V :

Calculer la somme de tous les entiers naturels compris entre 1 et 1000 inclus.

Exercice VI :

Au cours du dernier Noël, Marc a reçu 300 euros ; au lieu de dépenser cette somme il a décidé de se constituer une petite épargne pour partir en voyage aux Antilles. Il a donc mis cet argent dans une cagnotte et verse 75 euros supplémentaire chaque 1er du mois.

On notera E_0 la somme initiale et E_n la somme disponible le 2 du $n^{ième}$ mois. Ainsi le 2 janvier sa cagnotte contenait la somme de 375 euros donc $E_1 = 375$.

1. Calculer E_2,E_3 et interpréter ce calcul.
2. Quelle est la nature de la suite (E_n) ?
3. Exprimer E_n en fonction de n.
4. De quelle somme disposera-t-il le 2 juin 2006 ?
5. Calculer E_{13} et interpréter le résultat.
6. Le coût du voyage s'élève à 1850 ,pourra-t-il partir en décembre 2006 ?et en décembre 2007 ?

3 Suites géométriques

3.1 Définition

Définition :
On dit qu'une suite u est **géométrique** de **raison** q si : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Description schématique :

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} \ldots etc \quad u_{n-1} \xrightarrow{\times q} u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1} \quad \ldots etc$$

Par exemple la suite u des puissances de 2 est géométrique de raison 2,en effet :

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} \ldots etc \quad u_{n-1} \xrightarrow{\times 2} u_n \xrightarrow{\times 2} u_{n+1} \quad \ldots etc$$

$$u_0 \xrightarrow{\times 2} u_1 \xrightarrow{\times 2} u_2 \xrightarrow{\times 2} u_3 \xrightarrow{\times 2} u_4 \xrightarrow{\times 2} \ldots etc \quad u_{n-1} \xrightarrow{\times 2} u_n \xrightarrow{\times 2} u_{n+1} \quad \ldots etc$$

Ce schéma montre bien que $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout n.

3.2 Propriétés

Les deux propriétés suivantes permettent de calculer u_n en fonction de n lorsqu'une suite est géométrique :

Soit une suite u **géométrique** de **raison** q alors :
- Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n = u_0(q)^n$.
- Pour tout entier naturel n et p , on a $u_n = u_p(q)^{n-p}$.

En fait la 1ère se déduit de la 2ème en prenant $p = 0$.

Par exemple :

1. *si u est une suite géométrique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 2$ alors $u_n = 2(-3)^n$ pour tout n.*
2. *si U est une suite arithmétique de raison 2 et telle que $U_3 = 72$ alors pour tout n :*

$$U_n = U_3(2)^{n-3} = 72(2)^n(2)^{-3} = 72\frac{(2)^n}{(2)^3} = 72\frac{(2)^n}{8} = 9(2)^n.$$

3.3 Somme de termes

On s'intéresse à la somme $S = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} U_p = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{n-1} + U_n$.

On admettra le résultat suivant :

Soit une suite U **géométrique** de **raison** $q \neq 1$ alors :
$S = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{n-1} + U_n = U_0\left(\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$.
et si $q = 1$ le résultat est trivial :
$S = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{n-1} + U_n = U_0 + U_0 + U_0 + \cdots + U_0 = U_0(n + 1)$.

3.4 Exercices

Exercice VII : Pour chaque suite définie ci-dessous, dire si c'est une suite géométrique (on précisera alors le premier terme et la raison) et calculer les quatre premiers termes sous forme de fractions irréductibles.

1. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \frac{2^n}{3}$
2. Pour tout $n > 0$, $u_n = \frac{1}{n}$
3. $u_0 = 2$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$

Exercice VIII : Les suites de cet exercice sont **géométriques** de raison q.

1. $u_0 = 12$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_3. Exprimer u_n en fonction de n.
2. $q = -3$ et $u_9 = 13\,122$. Exprimer u_n en fonction de n.Calculer u_0.

Exercice IX : Soit u une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de terme initial $u_0 = 6$.

1. Calculer les trois premiers termes.
2. Donner des valeurs approchées de u_{25} et u_{124}.
3. Donner une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{i=0}^{50} u_i$.

Exercice X :

1. Calculer la somme de toutes les puissances de 2 comprises entre 0 et 50 000.
2. Calculer la somme $S = 5^3 + 5^4 + 5^5 + \cdots + 5^{17}$

4 Un exercice tiré Bac

Monsieur X a placé 2 000 € le 31 décembre 2002 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de $3,5$ % (ce qui signifie que, chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts). À partir de l'année suivante, il prévoit de placer, chaque 31 décembre, 700 € supplémentaires sur ce livret.
On désigne par C_n le capital, exprimé en euros, disponible le 1er janvier de l'année $(2003 + n)$, où n est un entier naturel. Ainsi, on a :

$$\mathrm{C}_0 = 2000.$$

(a) i. Calculer le capital disponible le 1er janvier 2004.
   ii. Établir, pour tout entier naturel n, une relation entre C_{n+1} et C_n.

(b) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = C_n + 20\,000.$$

   i. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   ii. Exprimer u_n en fonction de n.
   iii. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$C_n = 22\,000 \times (1,035)^n - 20\,000.$$

   iv. Calculer le capital disponible le 1er janvier 2008 (on arrondira le résultat à l'euro près).

(c) Le premier janvier 2008, Monsieur X retirera alors le capital disponible de la banque pour financer un voyage dont le coût (supposé fixe) est de 6 000 €. Il paiera cette somme en 4 mensualités qui seront 4 termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 800 €.
Calculer le montant de chacune de ces 4 mensualités.