Exercices de statistiques tirés du BAC.

Table des matières

1 Exercices avec un ajustement affine.

1.1 France, juin 2001.

Le prix de vente des terrains à bâtir dans la même commune rurale est donné par le tableau suivant :

Année	1980	1985	1987	1990	1995	1997	2000
Rang de l'année x_i	0	5	7	10	15	17	20
Prix du m^2 en francs y_i	58,8	60,9	62,1	67,5	71,7	73	73,8

1. Quelle est, en pourcentage, l'augmentation du prix du m^2 entre 1980 et 2000 ?
2. Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal où 5 cm représentent 10 ans en abscisse, 5 cm représentent 10 francs en ordonnées.
3. Déterminer le point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
4. On considère que la position des points sur le graphique justifie un ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine de y en x, notée (D) [les coefficients sont arrondis à $0,01$.Tracer (D).
5. Estimer à 1 millier de francs près le prix d'un terrain de 1500 m^2 en 2003.

1.2 Asie, juin 2001

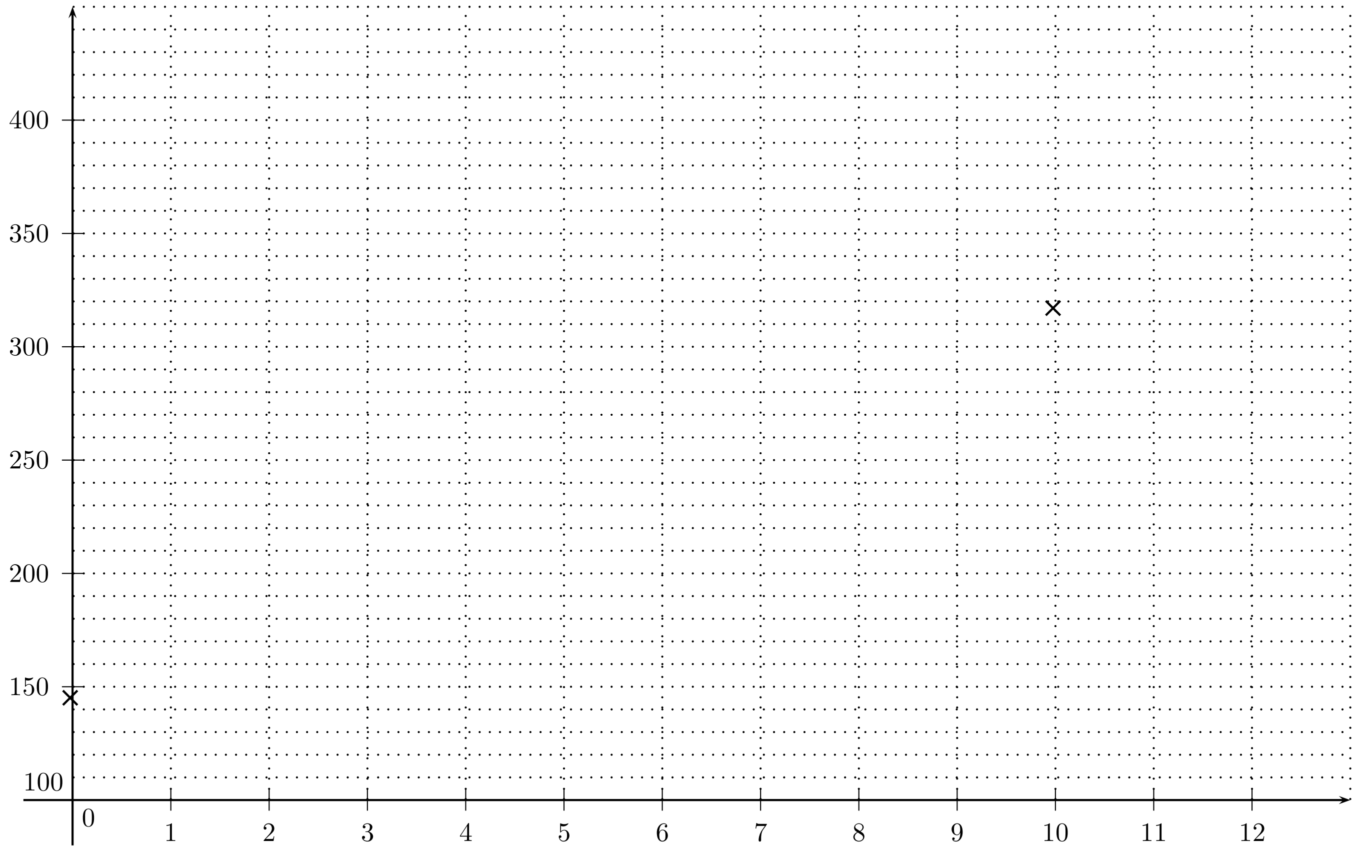
Le tableau suivant représente l'évolution du nombre d'éléphants dans une réserve, à partir de sa création en 1988 :

Année	1988	1990	1992	1994	1996	1998
Rang de l'année x_i	0	2	4	6	8	10
Effectif y_i	144	164	210	238	266	316

Le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ associé à cette série statistique est représenté en annexe. *Ce dernier document sera complété au fur et à mesure.* **L'objet de l'exercice est de faire des prévisions sur l'effectif de la population d'éléphants de cette réserve pour l'année 2000.** *Ces prévisions seront arrondies à l'entier le plus proche. Aucun détail des calculs statistiques, à effectuer à la calculatrice, n'est demandé dans cet exercice. Les coefficients des équations de droites seront arrondis au centième.*

1. Un premier ajustement affine du nuage de points est réalisé avec la droite $(d_1) = (M_0M_{10})$.
   (a) Tracer sur le graphique de l'annexe cette droite (d_1).
   (b) Au moyen d'une lecture graphique, déduire une prévision p_1 de l'effectif pour l'année 2000.
2. On désigne par (d_2) la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
   (a) Donner une équation de (d_2) et tracer cette droite sur le graphique joint en annexe.
   (b) Calculer la nouvelle prévision p_2 pour l'effectif en l'an 2000.
3. L'effectif pour l'année 1999 est maintenant connu : 336 éléphants.
   (a) Placer le nouveau point sur le graphique.
   (b) On intègre cette valeur dans la série statistique initiale.
   – Donner l'équation de la nouvelle droite (d_3) de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
   – Calculer la prévision correspondante p_3 pour l'effectif en l'an 2000.
4. On ne garde dans le tableau que les valeurs des années 1994 à 1999.
   (a) Donner l'équation de la droite (d_4) de régression de y en x.
   (b) Calculer la nouvelle prévision p_4 pour l'année 2000.

Annexe : Nombre d'éléphants dans la réserve.



1.3 Pondichéry, mai 2001

Le tableau suivant indique, en millions, la population de la France métropolitaine d'après les recensements depuis 1946.

Année	1946	1954	1962	1968	1975	1982	1990	1999
Rang de l'année x_i	0	8	16	22	29	36	44	53
Population en millions y_i	40,439	42,706	46,425	49,712	52,592	54,335	56,615	58,416

Le détail des calculs statistiques effectués avec une calculatrice n'est pas demandé. Les nombres à déterminer seront arrondis à trois décimales.

1. Le plan est rapporté à un repère orthogonal, les unités graphiques étant :
   - 0,25 cm sur l'axe des abscisses ;
   - 1 cm sur l'axe des ordonnées, la graduation des ordonnées débutant à 40.

   (a) Construire le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$.

   (b) Indiquer les coordonnées du point moyen G associé à la série $(x; y)$ et placer ce point sur le graphique précédent.
2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer cette droite (D) sur le graphique précédent.
3. En supposant que cette évolution de la population se poursuive, donner une estimation de la population en 2005.

2 Exercices avec des ajustements non affine.

2.1 France, juin 2002

Les résultats numériques seront obtenus à l'aide de la calculatrice ; aucun détail des calculs statistiques n'est demandé.

Le tableau suivant donne la dépense, en millions d'euros, des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 1990 à 1998.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Dépense y_i	398	451	423	501	673	956	1 077	1 255	1 427

Source INSEE

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i,\ y_i)$ et le point moyen dans un repère orthogonal tel que 2 cm représentent une année en abscisse et 1 cm représente 100 millions d'euros en ordonnée (ainsi 398 sera représenté par 3,98 cm).
2. (a) Un ajustement affine vous paraît-il justifié ?
   (b) Écrire une équation de la droite d'ajustement affine D de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}). Représenter D dans le repère précédent.
   (c) En utilisant cet ajustement affine, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.
3. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose $z_i = \ln y_i$.
   (a) Recopier et compléter le tableau suivant où z_i est arrondi à 10^{-3} :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
z_i	5,986	6,111	6,047	6,217					

   (b) Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}).
   (c) En utilisant cet ajustement, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.
4. En 2000 les ménages ont dépensé 68,9 milliards d'euros pour la culture, les loisirs et les sports et $3,1\ \%$ de ces dépenses concernent les produits informatiques.
   Avec lequel des deux ajustements l'estimation faite est-elle la meilleure ?

2.2 France, septembre 2003

Dans tout cet exercice les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

Une étude statistique effectuée sur un produit a donné les résultats suivants où
x désigne le prix unitaire en euros,
y désigne la demande en milliers d'unités
z désigne l'offre en milliers d'unités.

x	$1,5$	$2,5$	$3,5$	$4,5$	5	7	$8,5$
y	$8,4$	$5,3$	$3,9$	$3,1$	$2,8$	$2,1$	$1,7$
z	$0,75$	$1,25$	$1,75$	$2,25$	$2,5$	$3,5$	$4,25$

1. (a) Vérifier que la quantité offerte z est proportionnelle au prix unitaire x.
   (b) On appelle g la fonction offre ainsi définie sur $[1\,;\,10]$ par $z = g(x)$.
   Représenter g dans le repère orthonormal $\mathcal{R}$ (unité graphique 1 cm).
2. (a) Représenter, dans le repère $\mathcal{R}$, le nuage de points associé à la série statistique $(x\ ;\ y)$.
   (b) Donner une équation de la droite D d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (aucun calcul n'est exigé sur la copie).
   Tracer D dans le repère $\mathcal{R}$.
   (c) À l'aide de cet ajustement, calculer le prix unitaire d'équilibre (c'est-à-dire celui pour lequel l'offre est égale à la demande). Vérifier graphiquement.
3. On se propose de determiner un autre type d'ajustement pour cette série.
   (a) Recopier et compléter le tableau suivant :

$X = \ln x$	$0,41$		$1,25$				
$Y = \ln y$	$2,13$						

   (b) On admet qu'il est justifié de considérer un ajustement affine de Y en X.
   Donner une équation de la droite d'ajustement affine de Y en X.
   (c) En déduire que l'on a $y = e^{-0,92\ln x + 2,51}$ et calculer le prix unitaire d'équilibre obtenu avec ce nouvel ajustement.

2.3 Amérique du Sud ,novembre 2005

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de personnes âgées de plus de 85 ans, en France métropolitaine, de 1950 à 2000.
On note X_i l'année. L'indice i varie de 1 â 11. Par commodité on pose $x_i = X_i - 1950$.
y_i désigne, en milliers, le nombre de personnes âgées de 85 ans ou plus, au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année X_i.

X_i	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	201	231	290	361	423	498	567	684	874	1 079	1 267

Source : Insee, bilan démographique. Champ : France métropoIitaine.

1. Estimation à l'aide d'un graphique semi-logarithmique
   (a) Compléter le nuage de points $M_i\,(x_i\ ;\ y_i)$ associé à cette série statistique dans le repère semi-logarithmique fourni en annexe.
   (b) Construire sur ce graphique la droite passant par les points $\mathrm{M}_1(0\ ;\ 201)$ et $\mathrm{M}_{11}(50\ ;\ 1\,267)$ et justifier que l'ajustement du nuage à l'aide de cette droite est satisfaisant.
   (c) En supposant que cet ajustement affine reste pertinent, déterminer graphiquement à partir de quelle année le nombre de personnes âgées de plus de 85 ans dépassera 2 millions.
2. La forme du nuage obtenu avec la représentation logarithmique invite à chercher un ajustement exponentiel. On pose $z = \ln y$.
   (a) Compléter la dernière ligne du tableau fourni en annexe. Arrondir les résultats au millième.
   (b) En utilisant la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement de z en x. Les coefficients seront arrondis au millième.
   (c) En déduire une modélisation de y en fonction de x sous la forme $y = Ae^{Bx}$. (Le réel A sera arrondi à l'unité et le réel B au millième)
3. On admet que la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,70]$ par : $f(x) = 200e^{0,037x}$ modélise de façon satisfaisante l'évolution de cette population.
   Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 2\,000$ et interpréter ce résultat.

Annexe