IV. Notion de continuité – Théorème des valeurs intermédiaires

f est une fonction définie sur un intervalle I de ℝ.

a) introduction

Préambule : Soit f une fonction définie sur [0 ; 5] et telle que f (0) = 1 et f (5) = 9.

Exercice 1 :
Tracer la courbe représentative d'une fonction remplissant les conditions du préambule et telle que l'équation f(x) = 6 admet une unique solution.

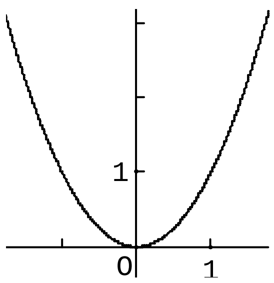
Exercice 2 :
Tracer la courbe représentative d'une fonction remplissant les conditions du préambule et telle que l'équation f(x) = 6 admet 2 solutions.

Exercice 3 :
Tracer la courbe représentative d'une fonction remplissant les conditions du préambule et telle que l'équation f(x) = 6 admet 3 solutions.

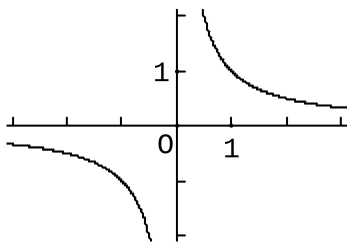
Exercice 4 :
Tracer la courbe représentative d'une fonction remplissant les conditions du préambule et telle que l'équation f(x) = 6 n'admet aucune solution.

La définition *:* Lorsque la courbe représentative de *f* ne présente pas de « saut », c'est à dire **lorsque cette courbe se trace d'un seul tenant sans lever le crayon**, on dit que ***f* est continue sur I**.

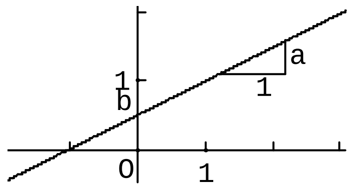
b) exemples de fonctions continues



La fonction carrée $x \mapsto x^2$ est continue sur ℝ.



La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur]0 ; +∞[et sur]-∞ ; 0[.



Une fonction affine $x \mapsto ax + b$ est continue sur ℝ.

Propriétés :
- Les fonctions de référence (fonctions affines, carré, inverse, racine carrée) sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
- Les fonctions polynômes sont continues sur ℝ.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

Théorème admis : Les fonctions dérivables sur I sont continues sur I.

Remarque : la réciproque est fausse. (Prendre $x \longmapsto |x|$)

Exemples :

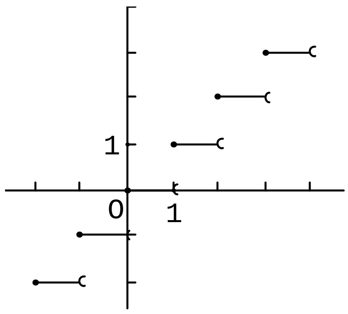
1) La fonction *f* définie sur ℝ par $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 9$ est continue sur ℝ.
2) La fonction *f* définie sur ℝ \ {2} par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x-2}$ est continue sur]-∞ ; 2[et sur]2 ; +∞[.

c) contre-exemple : la fonction partie entière

Définition : la fonction partie entière est la fonction définie sur ℝ, qui, à tout réel *x*, associe l'entier relatif *n* si x ∈ [n ; n + 1 [. On note E cette fonction partie entière.

Par exemple : E(2) = 2 car $2 \le 2 < 3$; E(5,8) = 5 car $5 \le 5{,}8 < 6$
E(-1) = -1 car $-1 \le -1 < 0$; E(-2,3) = -3 car $-3 \le -2{,}3 < 2$

Représentation graphique de E
Soit $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in [n\ ;\ n+1[$, $E(x) = n$.
Donc, sur $[n\ ;\ n+1[$, on trace le segment de droite d'équation $y = n$.



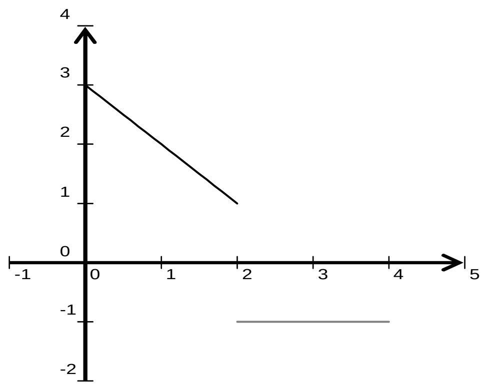
Remarque :
E n'est pas continue sur ℝ, car pour tracer sa courbe, il faut lever le crayon aux points d'abscisses 1, 2, 3 … et plus généralement en chaque point d'abscisse entière.

d) Théorème des valeurs intermédiaires

On posera a < b.
Soit f une fonction définie sur un intervalle [a ; b] .
Sous quelles hypothèses un nombre k compris entre f(a) et f(b) admet -il des antécédents ? Si oui combien ?

Observons 3 exemples où f est définie sur [0 ; 4] avec f(0) = 3 et f (4) = -1

- **Exemple 1 : f n'est pas continue sur [0 ; 4]**

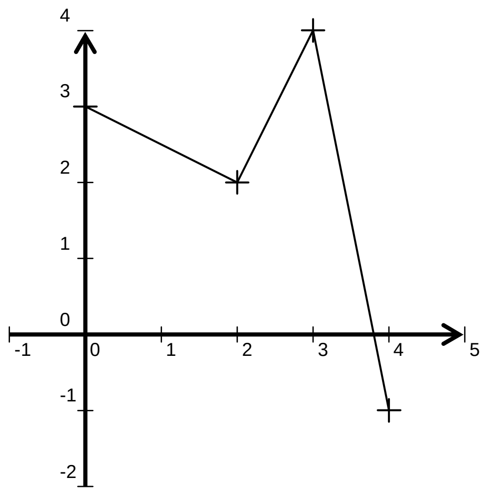


f(x) = $\begin{cases} -x+3 & si\ x \in [0\ ,\ 2\ ] \\ -1 & si\ x \in\ ]\ 2\ ,\ 4] \end{cases}$

Constat 1:

- f n'est pas continue sur [0 ; 4]
- les nombres entre - 1 et 1 n'ont pas d'antécédents

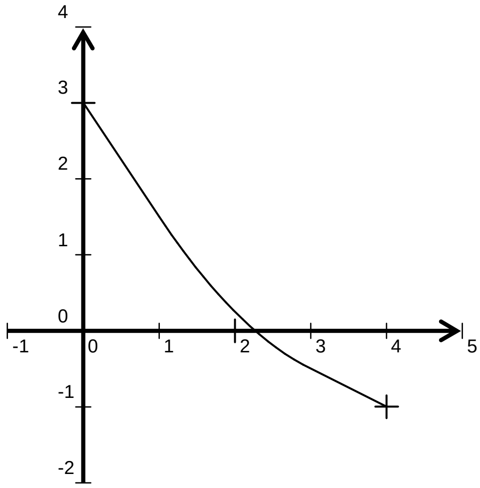
- **Exemple2 : f est continue sur [0 ; 4]**



Constat 2:

- les nombres dans [-1 ;2[ont un seul antécédent
- 2 a deux antécédents
- les nombres dans] -2 ;3] ont 3 antécédents
- les nombres dans] 3 ;4[ont 2 antécédents
- 4 a un seul antécédent

Exemple 3 : f est continue et strictement monotone sur [0 ; 4]

	**Constat 3:**] • les nombres entre - 1 et 3 ont tous un antécédent unique.

On admettra les résultats suivant sans démonstration :

<u>Théorème des valeurs intermédiaires :</u> Si une fonction *f* est continue sur un intervalle fermé [*a* ; *b*], et si *k* est un réel quelconque situé entre *f*(*a*) et *f*(*b*) , alors l'équation f(x) = k admet au moins une solution dans [a ;b] .

<u>Théorème de la valeur intermédiaire :</u> Si une fonction *f* est continue et strictement monotone sur un intervalle [*a* ; *b*], alors pour tout réel *k* situé entre *f*(*a*) et *f*(*b*) l'équation *f*(*x*) = *k* admet une **solution unique** dans [a ;b]

<u>Corollaires :</u>

- Si une fonction *f* est continue sur un intervalle fermé [*a* ; *b*], alors tout nombre entre *f*(*a*) et *f*(*b*) admet au moins un antécédent.

- Si une fonction *f* est continue sur un intervalle fermé [*a* ; *b*], alors tout nombre entre *f*(*a*) et *f*(*b*) admet exactement un antécédent.

<u>Exercice type :</u>

Soit *f* est la fonction définie sur l'intervalle [-3 ; 6] par $f(x) = x^3 - 12x$.

a) Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de *f*.
b) Pourquoi l'équation $f(x) = 30$ a-t-elle des solutions dans l'intervalle [-3 ; 6] ?
c) Combien cette équation a-t-elle de solutions ?
d) En donner une approximation d'amplitude 10^{-2}, en utilisant la calculatrice.